حد بی‌نهایت

بخش‌پذیری چندجمله‌ای f(x) بر (x - a)

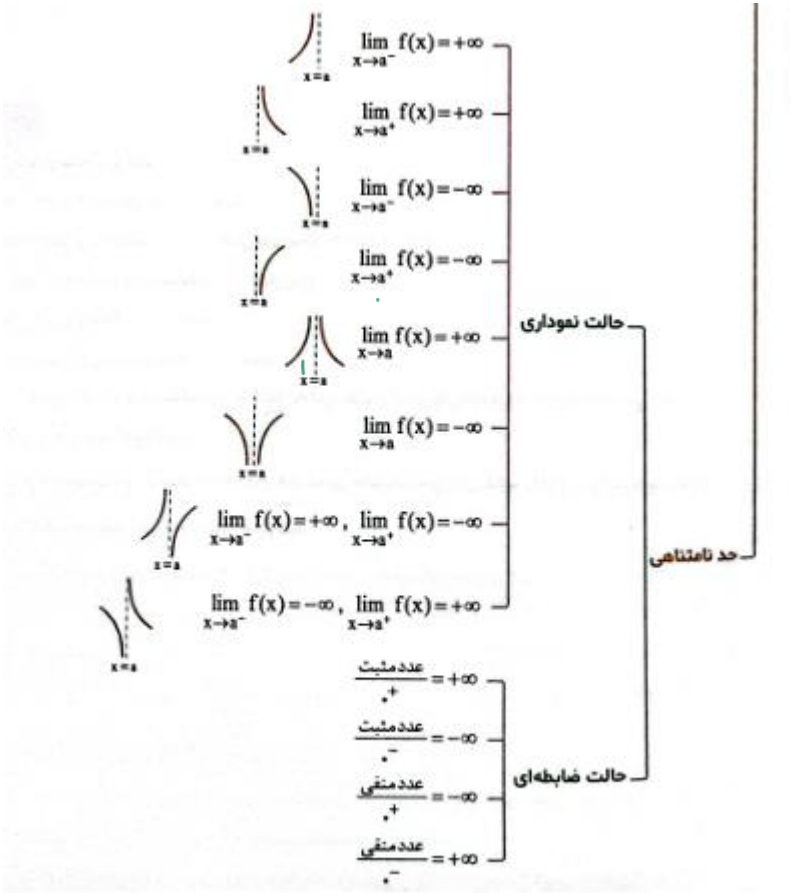
- $f(a)$ همان باقی‌مانده است.
- اگر $f(a)=0$ باشد، $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

- **به کمک تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها:** صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم تا عامل صفرشونده در صورت و مخرج ظاهر شود. آن عامل را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم و سپس حد می‌گیریم.
- **به کمک تقسیم چندجمله‌ای:** زمانی که تجزیهٔ صورت یا مخرج کار ساده‌ای نباشد، از تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر عامل صفرشونده استفاده می‌کنیم.
- **رفع ابهام رادیکالی‌ها به کمک ضرب در مزدوج:** اگر فرجهٔ رادیکال ۲ باشد، همانند گویاکردن مخرج کسرها، رادیکال را در مزدوجش ضرب و تقسیم می‌کنیم.
- **رفع ابهام رادیکالی‌ها به کمک اتحاد چاق‌ولاغر:** وقتی فرجهٔ رادیکال ۳ باشد، به کمک اتحاد چاق‌ولاغر رفع ابهام می‌کنیم.

همسایگی

- هر بازهٔ باز، شامل عدد حقیقی a را یک همسایگی a می‌گوییم؛ به عنوان مثال بازهٔ $(-1,3)$ یک همسایگی برای ۲، یک همسایگی راست برای ۱- و یک همسایگی چپ برای ۳ است.
- **همسایگی محذوف:** بازهٔ $(-1,3)-\{1\}$، یک همسایگی محذوف ۱ است.


حد نامتناهی
حالت نموداری
حالت ضابطه‌ای
$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$
$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$
$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$
$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$
$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$
x=a

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=2x^3-x^2+1$ بر $x-1$ برابر ۲ است. درست

چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است. درست

در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-a$، باقی‌مانده برابر $p(a)$ است. درست

در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x+a$، اگر $p(a)$ صفر باشد، آن‌گاه $p(x)$ بر $x+a$ بخش‌پذیر است. نادرست

بازهٔ $(2,5)$ یک همسایگی ۴ است. درست

بازهٔ $(1,3)$ یک همسایگی راست ۳ است. نادرست

جواب نامعادلهٔ $x^2<2x+3$، همسایگی راست ۱- است. درست

حاصل حد $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x+2}$، برابر صفر است. درست

حاصل $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$، برابر صفر است. نادرست

$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=+\infty$ نادرست

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=+\infty$ نادرست

$x-1=0 \to x=1 \to p(1)=2-1+1=2$

$x^2-2x-3<0 \to (x-3)(x+1)<0$

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=-4$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{0}{0^+}=0$

جاهای خالی را با اعداد یا عبارت‌های مناسب پر کنید.

. باقی‌ماندهٔ تقسیم $2x^2-5x+1$ بر $x-3$، برابر با ..... است.

. چندجمله‌ای $p(x)=2x^3+x^2+1$ بر دوجمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است. $((x+1)/(x-1))$

چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر ..... .

بازهٔ $(-2,0)$، یک همسایگی چپ برای عدد 0 است.

مجموعهٔ $(-2,6)-\{0\}$، یک همسایگی محذوف عدد صفر است.

. فرض کنید f در یک همسایگی a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کرد، مشروط بر آن‌که x به‌قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

فرض کنید f در یک همسایگی از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه، بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن‌که x با مقادیر بزرگ‌تر از a به‌قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$، در این‌صورت اگر $L<0$ و مقدار $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a ..... باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{[x]}{x-2}$، برابر $\frac{2}{0^+}$ است.

$=+\infty$

فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد. اگر $q(x)=p(x-1)+p(1-x)$ ، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ را بر $x-2$ به دست آورید

$x^2-1=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow p(1)=0 \\ x=-1 \rightarrow p(-1)=0 \end{cases}$

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$q(2)=p(2-1)+p(1-2)$

$=p(1)+p(-1)$

$=0+0=0$

فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به‌ترتیب ۳ و ۱ باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^2)+4p(-x)$ را بر $x-2$ به دست آورید.

$x-2=0 \to x=2$

$p(4)=3$

$p(-2)=1$

$p(4)+4p(-2)$

$3+4\times 1 = 3+4=7$

پ) $\lim\limits_{x\to -۴} \dfrac{x^۲+۳x-۴}{\cancel{x^۳}+۴x^۲+x+۴}$ $= \dfrac{-۵}{۰}$

$-۴x^۲$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۵x+۶}{۲x^۳-۱۳x^۲+۲۴x-۹}$ $\dfrac{۰}{۰}$

$$\lim_{x\to -۴} \frac{\cancel{(x+۴)}(x-۱)}{\cancel{(x+۴)}(x^۲+\cancel{۲x}+۱)} = \frac{-۵}{۱۷}$$

$$\text{Hopl}: \lim_{x\to -۴} \frac{۲x+۳}{۳x^۲+۸x+۱} = \frac{-۵}{۴۸-۳۲+۱} = \frac{-۵}{۱۷}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-\sqrt{4x-3}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x-3}}{\sqrt{x}+\sqrt{4x-3}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+\sqrt{4x-3})}{(x-4x+3)}$$

$-3x+3$

$-3(x-1)$

$$=\frac{3\times 3}{-3}=-3$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$$

Hop

$$\text{Hopl}\ \lim_{x\to 2}\frac{-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=-3$$

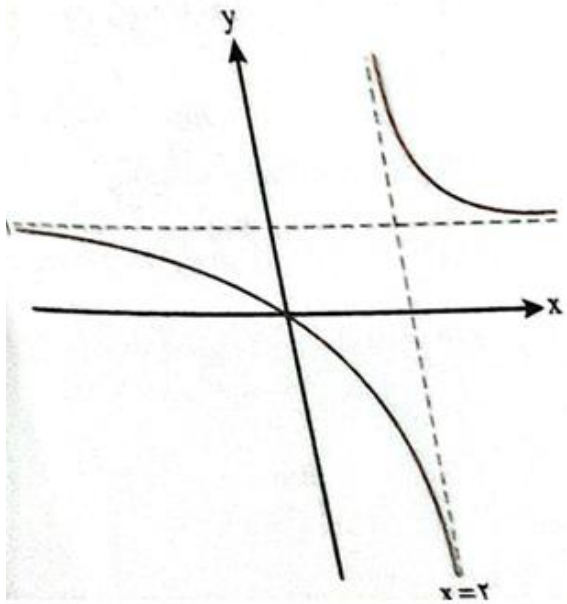
الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=3$$

$$\cancel{x-1}$$

$$\text{Hopital}\quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

با توجه به نمودار f ، حاصل حدهای داده‌شده را بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$ حد ندارد

$l_1 \neq l_2$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$$

$$= \frac{۰-۳}{۰^+} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to (-۱)^-} \frac{[x]+۲}{x+۱}$$

$$\frac{-۲+۲}{۰} = \frac{۰}{۰} = ۰$$

$$\lim_{x \to (-۲)^+} \frac{[x]+۳}{x^۲+۲x} = \frac{1}{0}$$

$$= -\infty$$

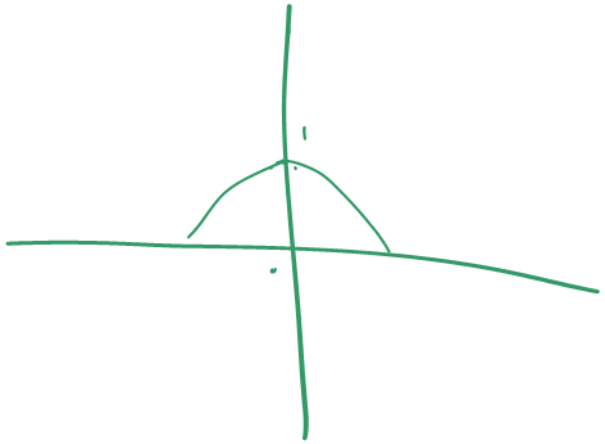
$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{\sqrt{x-۱}-x}{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}$$

$\frac{+}{|x-۱|}$

$x-۱$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-\cos x}$$

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

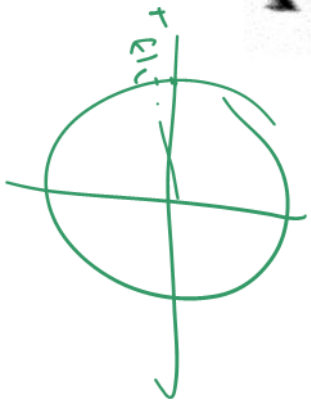


$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos(2x) - 1}{\cos x} =$$

$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

$\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$

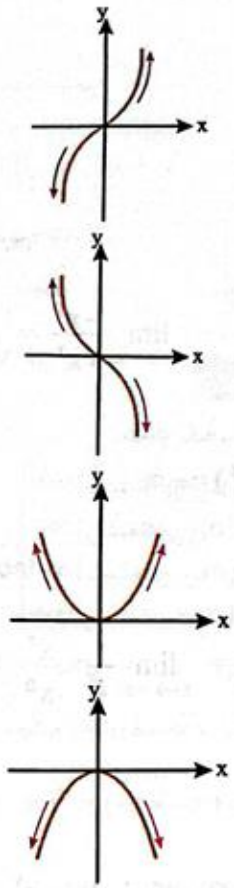


$\frac{-2}{0^-} = +\infty$

حد در بی‌نهایت

حد نامتناهی در بی‌نهایت

از لحاظ نموداری



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$$

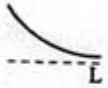
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \end{cases}$$

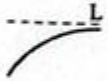
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$$

از لحاظ ضابطه‌ای

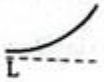
- از لحاظ ضابطه‌ای
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n$
    - $+\infty$ (a مثبت)
    - $-\infty$ (a منفی)
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n$
    - $+\infty$ (n زوج و a مثبت)
    - $-\infty$ (n زوج و a منفی)
    - $-\infty$ (n فرد و a مثبت)
    - $+\infty$ (n فرد و a منفی)
- از لحاظ نموداری
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ($f(x)$ با مقادیر بزرگ‌تر از L ، به L نزدیک می‌شود.)



  - $\lim\limits_{x\to f(x)} =L$ ($f(x)$ با مقادیر کوچک‌تر از L ، به L نزدیک می‌شود.)



  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ ($f(x)$ با مقادیر بزرگ‌تر از L ، به L نزدیک می‌شود.)



  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ ($f(x)$ با مقادیر کوچک‌تر از L ، به L نزدیک می‌شود.)

- از لحاظ ضابطه‌ای
  - در چندجمله‌ای‌ها: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)\simeq\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$
  - در کسرها
    - اگر درجهٔ صورت و مخرج یکسان باشد، آن گاه حاصل حد، یک عدد حقیقی است.
    - اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج بیشتر باشد، آن‌گاه حاصل حد، ∞ است.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2}$ ، برابر با صفر است. درست

حد تابع $f(x)=\frac{3x^2-4x+1}{2+3x-x^2}$ وقتی $x\to-\infty$ ، برابر -3 است. درست

حد تابع $f(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{3x-\sqrt{x+1}}$ وقتی $x\to-\infty$ ، برابر ۱ است. نادرست

$\frac{2x+|x|}{3x}=\frac{2x-x}{3x}=\frac{1}{3}$

حد تابع $f(x)=\frac{(x+1)^3+x^3}{4x^3+x^2}$ وقتی $x\to+\infty$ ، برابر $\frac{1}{2}$ است. درست

$\frac{3x^3}{4x^3}=\frac{1}{2}$

حد تابع $f(x)=\frac{x^4+2x^2}{(x^3+1)^2}$ وقتی $x\to+\infty$ ، برابر $+\infty$ است. نادرست

$\frac{x^4}{x^6}$

اگر $f(x)=\begin{cases}-1 & ; x\geq 0\\ +1 & ; x<0\end{cases}$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+1$. درست

اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{5x+1}{x^2-1} & ; x<0\\ \frac{1-x^3}{x^2+7} & ; x>0\end{cases}$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. درست

$\frac{-x^3}{x^2}=-x\to-\infty$

جاهای خالی را با اعداد یا عبارت‌های مناسب پر کنید.

حد تابع $f(x)=\frac{2}{6x-1}$ وقتی $x\to+\infty$ ، برابر است با ..... ۰ .

حاصل حد $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x^2})$ برابر است با ..... ۰.

حد تابع $f(x)=\frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}-5}$ وقتی $x\to+\infty$ ، برابر ..... $-\frac{4}{5}$ است.

حد تابع $f(x)=\frac{-3x^7+5x^2}{2x^3+9}$ وقتی $x\to-\infty$ ، برابر ..... است.

$\frac{5x}{x^2}$

حد تابع $f(x)=\frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی $x\to-\infty$ ، برابر ..... ۰ است.

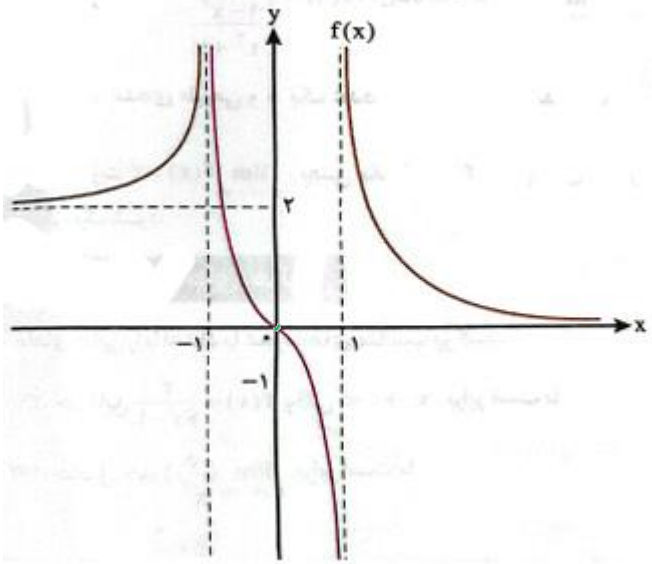
حد تابع $f(x)=\frac{1-2x^2+3x}{x^2+5x}$ وقتی $x\to-\infty$ ، برابر ..... -2 است.

$\frac{-2x^2}{x^2}$

حد تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ; x>0\\ \frac{5x^2-3x}{-x^2+1} & ; x\le 0\end{cases}$ وقتی $x\to-\infty$ ، برابر ..... -5 است.

حد تابع $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3x-\sqrt{x+1}}$ وقتی $x\to+\infty$ ، برابر ..... $\frac{2}{3}$ است.

$\frac{x+|x|}{3x}=\frac{2x}{3x}$



. نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته‌شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to-۱} f(x) = ۰$

ت) $\lim\limits_{x\to۱^-} f(x) = -\infty$

حاصل حدهای روبه‌رو را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + 2x^2 + x - 3)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -3x^3 = -3(-\infty)^3 = -3 \times -\infty = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^4 + 7x^3 + 2x - 1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^4 = -2(+\infty) = -\infty$

حاصل حدهای زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(۹+\frac{۷}{x^{۲}}\right)=۹$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{۴}{x}-۵}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳-۵x+۱}{۶x^۳-۱۱x^۲-۳}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۹x^۳-۴x^۲+۵x+۲}{۲x+x^۳+۴x^۴}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۹x^۳}{۴x^۴}=۰$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\cancel{x^۳}}{۶\cancel{x^۳}}=\frac{۱}{۳}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x+\sqrt{x^۲+۲}}{۵x+۶}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x+\overset{-x}{\cancel{|x|}}}{۵x}$$

$$=\lim\frac{۴x}{۵x}=\frac{۴}{۵}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱۲x^{۲}+\sqrt{۲x^{۲}+۱۸}}{۳x^{۳}+۱}$$

$$\frac{۱۲x^{۲}}{۳x^{۳}}=۰$$

۰۹۱۲ ۳۲۰۹۴۷۰

$\sqrt{x^2} = |x|$

اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ را به دست آورید.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - |2x|}{x}$

$\lim \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3$

. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^{۳}+۲x^{۲}+۴}{۳x^{b}+x-۱}=-\frac{۴}{۳}$ باشد. $(a\neq ۰)$

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-۳)^۳(۲x-۲)^۲}{x^۲-۵x^۵}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{۲x^۲|x|+۳|x|}{-x^۲+۱+x}$